Δ Υ Ν Α Μ Ε Ι Σ

Ορισμοί:

1) $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha}_{\nu-\text{φορές}}$

2) $\alpha^{0} = 1 \quad , \quad \text{για } \alpha \neq 0$

3) $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \quad , \quad \text{για } \alpha \neq 0$ και γενικότερα: $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$

Ιδιότητες δυνάμεων με ίδια βάση:

1) $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$

2) $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$

3) $\left(\alpha^{\nu}\right)^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$

Ιδιότητες δυνάμεων με ίδιο εκθέτη:

1) $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

2) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

Κανόνας πρόσημου:

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας πρόσημου για τις δυνάμεις δικαιολογείται πλήρως από την εφαρμογή του κανόνα για γινόμενο πολλών παραγόντων, αφού η δύναμη είναι στην ουσία ένα γινόμενο.

Σημαντική παρατήρηση:

$$-\alpha^{\nu} = -\underbrace{\alpha\cdot\ldots\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\text{φορές}}$$

$$(-\alpha)^{\nu} = \underbrace{(-\alpha)\cdot\ldots\ldots\cdot(-\alpha)}_{\nu-\text{φορές}}$$

Δηλαδή: $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ ενώ $-5^2 = -5\cdot 5 = -25$

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γνωρίζουμε ότι όλες οι εξισώσεις $x^2=\alpha$, $\alpha>0$, έχουν δύο πραγματικές λύσεις (ρίζες).
Αν ο α είναι τέλειο τετράγωνο (9 , 16 , 25 , 36 κτλ) , γνωρίζουμε ποιοι αριθμοί μπορεί να είναι το x , πχ οι λύσεις της $x^2=25$ είναι: x=5 ή x=-5.

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου ο μη αρνητικός αριθμός α δεν είναι τέλειο τετράγωνο;
Τότε οι λύσεις της εξίσωσης $x^2=\alpha$, $\alpha>0$ είναι άρρητοι αριθμοί, δηλαδή αριθμοί με άπειρα, μη επαναλαμβανόμενα, δεκαδικά ψηφία, τους οποίους δεν μπορούμε να τους περιγράψουμε στη δεκαδική τους μορφή, καθώς θα έπρεπε να τους «κουτσουρέψουμε» , καταλήγοντας έτσι σε μία ρητή τους προσέγγιση.
Για να καταφέρουμε να τους περιγράψουμε και να μπορούμε να συνεννοηθούμε σχετικά με το ποιον, ακριβώς, αριθμό εννούμε τους δώσαμε την ονομασία «τετραγωνικές ρίζες».
Έτσι, όταν λέμε «τετραγωνική ρίζα του 7» αναφερόμαστε στον αριθμό εκείνο που είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2=7$ και τον συμβολίζουμε με $\sqrt{7}$.

Οπότε:
Τετραγωνική ρίζα ενός <u>μη αρνητικού αριθμού</u> α είναι ένας <u>μη αρνητικός αριθμός</u> x για τον οποίο ισχύει: $x^2=\alpha$.
Τον αριθμό αυτόν x τον συμβολίζουμε με $\sqrt{\alpha}$.
Παρατηρούμε ότι η $x^2=\alpha$ με α>0 έχει και δεύτερη λύση (ρίζα) την $-\sqrt{\alpha}$

(*προφανώς, αφού:* $\left(-\sqrt{\alpha}\right)^2 = \sqrt{\alpha}^2 = \alpha$)

Άρα έχουμε ορίσει ότι με $\sqrt{\alpha}$ συμβολίζουμε τη θετική λύση της $x^2=\alpha$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τη ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α να είναι η μη αρνητική λύση της $x^\nu=\alpha$ και συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Επειδή από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας είναι $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$ και

επειδή από τις ιδιότητες των δυνάμεων είναι: $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2=\alpha^{2\cdot\frac{1}{2}}=\alpha^1=\alpha$,

συμβολίζουμε: $\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}}$ και γενικά: $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, γράφοντας έτσι τις ρίζες ως δυνάμεις , κάτι το οποίο μας βοηθάει αφού πλέον μπορούμε να εφαρμόζουμε ιδιότητες δυνάμεων ακόμα και όταν έχουμε να κάνουμε με ρίζες.

<u>Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας:</u>

1. $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

2. $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

3. $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{|\alpha|}\cdot\sqrt{|\beta|}$ και αν α,β>0 τότε: $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

4. $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{|\alpha|}}{\sqrt{|\beta|}}$ και αν α,β>0 τότε: $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

<u>Ιδιότητες ν-οστής ρίζας:</u>

1. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$

2. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\sqrt[\nu]{|\beta|}$ και αν α,β>0 τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}$

3. $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt[\nu]{|\alpha|}}{\sqrt[\nu]{|\beta|}}$ και αν α,β>0 τότε: $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

4. $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

5. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Οι παραπάνω ιδιότητες γίνονται πιο εύκολα κατανοητές μέσω της γραφής της ρίζας ως δύναμης: $\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}}$ και $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$

Δ Ι Α Τ Α Ξ Η

<u>Ορισμός:</u> $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0}$

Αυτό που λέει, δηλαδή, ο ορισμός είναι πως μπορούμε να συγκρίνουμε δύο αριθμούς εάν γνωρίζουμε το πρόσημο της διαφορά τους.

<u>Ιδιότητες</u>:

1. Αν α>β και β>γ τότε ισχύει και: α>γ	Μεταβατική ιδιότητα
2. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$	Μπορώ να προσθέσω τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη μιας ανισότητας.
3. Αν γ>0 τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$	Μπορώ να πολλαπλασιάσω με τον ίδιο θετικό αριθμό τα δύο μέλη μιας ανισότητας και η φορά διατηρείται.
4. Αν γ<0 τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$	Μπορώ να πολλαπλασιάσω με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τα δύο μέλη μιας ανισότητας και η φορά αλλάζει.
5. Αν α>β και γ>δ τότε: α+γ>β+δ	Μπορώ να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες όμοιας φοράς.

Προσοχή: <u>ΠΟΤΕ δεν αφαιρώ ανισότητες κατά μέλη</u>

Παρατηρήσεις:

1. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}_+$ και $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

2. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$ και $\alpha > \beta$ τότε $\alpha^\nu > \beta^\nu$.

Δηλαδή μπορώ να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες όμοιας φοράς, αν όλοι οι αριθμοί που συμμετέχουν σε αυτές είναι θετικοί.

Εφαρμογή: Αν $2 \le x \le 5$ και $-3 \le y \le 4$ να φράξετε την παράσταση $2x-3y$.

Λύση:

$$2 \le x \le 5 \;\Rightarrow\; 2\cdot 2 \le 2x \le 2\cdot 5 \;\Rightarrow\; 4 \le 2x \le 10 \quad (1)$$

$$-3 \le y \le 4 \;\Rightarrow\; -3(-3) \ge -3y \ge -3\cdot 4 \;\Rightarrow\; -12 \le -3y \le 9 \quad (2)$$

Αθροίζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$4+(-12) \le 2x+(-3y) \le 10+9 \;\Rightarrow\; -8 \le 2x-3y \le 19$$