ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ (ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ) ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $\boxed{\alpha x+\beta=0}$

$\frac{x}{2}-3(2x-5)+\frac{7}{5}=2x+6 \Leftrightarrow$ $10\cdot\frac{x}{2}-10\cdot 3(2x-5)+10\cdot\frac{7}{5}=10\cdot 2x+10\cdot 6 \Leftrightarrow$	1. Διώχνουμε τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών
$5x-30(2x-5)+2\cdot 7=20x+60 \Leftrightarrow$	2. Βγάζουμε τις παρενθέσεις με την επιμεριστική ιδιότητα
$5x-60x+150+14=20x+60 \Leftrightarrow$	3. Χωρίζουμε γνωστούς - αγνώστους
$5x-60x-20x=60-150-14 \Leftrightarrow$	4. Αναγωγή (συμμάζεμα) όμοιων όρων
$-75x = -104 \Leftrightarrow$ $\frac{\cancel{-75}x}{\cancel{-75}} = \frac{-104}{-75} \Leftrightarrow$ $x = \frac{104}{75}$	5. Διαίρεση κατά μέλη με τον συντελεστή του x

Τα βήματα επίλυσης των πρωτοβάθμιων ανισοτήτων είναι ακριβώς τα ίδια με τα παραπάνω. Απλώς πρέπει κάποιος να είναι προσεκτικός κατά την εκτέλεση του τελευταίου βήματος (διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου) , ώστε να αλλάξει τη φορά της ανίσωσης, αν ο συντελεστής είναι αρνητικός αριθμός.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \ , \quad \alpha\neq 0$

(*τριώνυμο 2ου βαθμού*)

Καλούμε διακρίνουσα του τριωνύμου την ποσότητα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\Delta>0$

  Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

  Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:
  $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

  Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

- $\Delta=0$

  Το τριώνυμο έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την: $x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$

  Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:
  $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$

  Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		0	ομόσημο του α	

- $\Delta<0$

  Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

  Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		

Εφαρμογή:

i. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 3 = 0$
ii. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $2x^2 - x - 3$
iii. Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 - x - 3 > 0$

Λύση:

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 3$ έχει συντελεστές: α=2 , β=-1 , γ=-3 και διακρίνουσα:
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2(-3) = 1 + 24 = 25 > 0$.

Άρα η εξίσωση $2x^2 - x - 3 = 0$ θα έχει δύο πραγματικές λύσεις (ρίζες) τις:

$$x_1 = \frac{1-5}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} =$$

$$x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Οπότε θα παραγοντοποιείται βάσει της σχέσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ ως εξής: $2x^2 - x - 3 = 2\left(x - (-1)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x + 1\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

και επειδή α=2>0 το πρόσημό του , βάσει του κανόνα:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

θα είναι:

x	$-\infty$	-1		$3/2$	$+\infty$
$2x^2 - x - 3$	+	0	-	0	+

Άρα η λύση της ανίσωσης $2x^2 - x - 3 > 0$ είναι: $x \in \left(-\infty, -1\right) \cup \left(3/2, +\infty\right)$