

## ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

## ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1.  $\alpha\chi + \alpha\psi + \alpha\omega = \alpha(\chi + \psi + \omega)$  :

$$x^3 + 12x^2 + 36x = x(x^2 + 12x + 36)$$

2. Η ταυτότητα:  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  :

$$a^2b^4 - 9c^8 = (ab^2)^2 - (3c^4)^2 = (ab^2 + 3c^4)(ab^2 - 3c^4)$$

3. Η ταυτότητα:  $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$  :

$$a^3 + 12a^2 + 36a = a(a^2 + 12a + 36) = a(a^2 + 2 \cdot 6 \cdot a + 6^2) = a(a + 6)^2$$

4. Γενικότερα όλες οι ταυτότητες με πιο επικίνδυνες:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

5. Το τριώνυμο 2ου βαθμού της μορφής:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\Delta > 0$  και ρίζες τους αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$  παραγοντοποιείται:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$   
 $3x^2 + x - 10 = 3(x - 5/3)(x + 2)$

6. Σε μια παράσταση μπορεί να χρειαστεί να παραγοντοποιήσω κατά ζεύγη ή τριάδες:

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \beta y^2 =$$

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2) =$$

$$(\alpha + \beta)(x^2 + y^2)$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 =$$

$$1 - x + x^2(1 - x) + x^4(1 - x) + x^6(1 - x) =$$

$$(1 - x)(1 + x^2 + x^4 + x^6)$$

7. Μπορεί να χρειαστεί να αλλάξω και κάποιο πρόσημο:

$$\alpha x + \beta y + \alpha - \beta x - \alpha y - \beta =$$

$$(\alpha - \beta)x + (\beta - \alpha)y + \alpha - \beta =$$

$$(\alpha - \beta)x - (\alpha - \beta)y + \alpha - \beta =$$

$$(\alpha - \beta)(x - y + 1)$$

Ασκήσεις (διαβάστε σχόλια στο τέλος)

A. Απλώς βγάλτε κοινό παράγοντα:

1.  $x^2 - x =$

2.  $x^2 + 2x =$

3.  $2x - x^2 =$

4.  $4x^2 - 8x =$

5.  $2x - 2 =$

6.  $4x + 2 =$

7.  $-3x + 6 =$

8.  $-5x - 25 =$

9.  $-5x + 5 =$

10.  $4y + 4 =$

11.  $14x - 4 =$

12.  $24x + 16 =$

13.  $4x^3 + 2x^2 =$

14.  $8x^2 - 12x^3 =$

15.  $6x^2y - 3xy^2 =$

16.  $4a^3b^2 + 2ab^3 - ab^2 =$

17.  $3xy^3 - 6x^2y^2 + xy^2 =$

18.  $-3x^3y^2 + 9x^4y^4 =$

B. Συνεχίζουμε με κοινό παράγοντα:

1.  $6x^3(x - a) - 3x^2(x - a) =$

5.  $4x(x - 2) - 2(2 - x) =$

2.  $2xy(x - 2)^2 - 4x^2y(x - 2)^3 =$

6.  $2x(x + 1) - 7x - 7 =$

3.  $4x(x + 3)^2 - 6x^2(x + 3) =$

7.  $3x(2x - 1) - 2x + 1 =$

4.  $2y(2y - 1) + 3(1 - 2y) =$

8.  $4x(2 - 3x) + 4 - 6x =$

Γ. Ομαδοποιείστε τις παρακάτω ποσότητες (σε ζεύγη):

1.  $3ax - 6a + x - 2 =$

2.  $2xy - 4ay - x + 2a =$

3.  $2a^2 - 6a - ax + 3x =$

4.  $ax^2 + a^2x - 3x - 3a =$

5.  $3a^2x - 6a^2 - 2yx + 4y =$

6.  $2a^3x^2 + 4ay^2 + 12xy^2 + 6a^2x^3 =$

7.  $3x + 2ax - 3a - 2x^2 =$

8.  $2x(x-3) - 3a(x-3) - 4x + 6a =$

Δ. Διαφορές τετραγώνων, από τις απλούστερες προς τις δυσκολότερες:

1.  $4x^2 - 9 =$

3.  $a^2x^4 - 25 =$

5.  $x^4 - a^4 =$

7.  $(3x-2)^2 - 25 =$

9.  $(x-5)^2 - 4x^2 =$

11.  $16x^2 - (2x-3)^2 =$

13.  $4x^2 - (3x+1)^2 =$

15.  $4ax^2 - 9a =$

17.  $4a^2(x-2) - 9(x-2) =$

2.  $16 - 9a^2 =$

4.  $a^4 - 4x^6 =$

6.  $a^2 - 4x^4 =$

8.  $(2a+1)^2 - (1-3a)^2 =$

10.  $(x+5)^2 - (1-3x)^2 =$

12.  $(7-2x)^2 - (3x-2)^2 =$

14.  $4(2x-1)^2 - 9(x+2)^2 =$

16.  $2a^3x^4 - 8ax^8 =$

18.  $2x^4(x-1) + 8x^2(1-x) =$

Ε. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σαν τετράγωνο διωνύμων:

1.  $4x^2 + 1 + 8x =$

3.  $9a^2 + 12ax^2 + 4x^4 =$

5.  $4x^2 + 9y^2 + 12xy =$

7.  $y^6 + 8y^3x^2 + 16x^4 =$

9.  $6a^3x^3 + 9a^4x^2 + a^2x^4 =$

11.  $x^4 + 10x^2 + 25 =$

2.  $25 + 10x^2 + x^4 =$

4.  $a^2 + \frac{9}{a^2} + 6 =$

6.  $a^2x^4 + y^2 + 2axy^2 =$

8.  $2x + 1 + x^2 =$

10.  $4xy^2 + x^2 + 4y^4 =$

12.  $9a^2y^2 + 12ay^3 + 4y^4 =$

ΣΤ. Έχουν κοινό παράγοντα, αλλά υπάρχει και συνέχεια:

1.  $4x^2(x-3) - x + 3 =$

2.  $9(2x-1) - 2a^2x + a^2 =$

3.  $x^2(a-2) - 16(a-2) =$

4.  $x^2(a+1) - 4x(a+1) + 4(a+1) =$

5.  $a^2(x-2) + 4ay(x-2) + 4y^2(x-2) =$

6.  $16(x-3)^2 - 4a^2(3-x)^2 =$

7.  $x^2(x-2) + 4x(2-x) + 4x - 8 =$

8.  $x^3(x+2) - 4x(x+2) + ax^2 + 4ax + 4a =$

9.  $x^2(2x-1) - 3x(2x-1) + 4x - 2 =$

10.  $x^2(2a-3)^3 - 4x(2a-3)^2 + 8a - 12 =$

Ζ. Ομαδοποίηση, προτιμήστε το τρεις - ένας και εφαρμόστε ταυτότητες:

- |                                 |                                       |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x^2 + 2x + 1 - a^2 =$       | 7. $9x^2 - 9 - y^2 - 6y =$            |
| 2. $x^2 - 2ax + a^2 - 16 =$     | 8. $2x + 4a^2 - 1 - x^2 =$            |
| 3. $1 - x^2 + 2ax - a^2 =$      | 9. $4x^2 + 12x + 9 - y^2 + 2ay - 1 =$ |
| 4. $9a^2 - 4x^2 - 4x - 1 =$     | 10. $y^2 + \frac{4}{y^2} - 5 =$       |
| 5. $25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^6 =$ | 11. $27a^3 - 12ax^2 - 12ax - 3a =$    |
| 6. $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 =$  | 12. $x + \frac{1}{x} - 3 =$           |

Η. Διασπάστε κατάλληλα έναν από τους τρεις όρους και παραγοντοποιήστε:

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 - 5x + 6 =$      | 2. $x^2 - 5xy - 4y^2 =$   |
| 3. $x^2 + 3x + 2 =$      | 4. $4x^2 - 7xy + 3y^2 =$  |
| 5. $x^2 - 4x - 5 =$      | 6. $3a^2 - ay - 2y^2 =$   |
| 7. $x^2 + 3ax - 4a^2 =$  | 8. $x^2 + ax - 12a^2 =$   |
| 9. $4x^2 + 8xy + 3y^2 =$ | 10. $4a^2 - 4ax - 3x^2 =$ |

Θ. Δοκιμάστε να τις παραγοντοποιήσετε, αφήνοντας και τη φαντασία σας ελεύθερη:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(x - 2a)^2(x - 2) - 4x^3 + 8x^2 =$         | 7. $3(x - 2)(x^2 - 9) + 7(2 - x)(3 - x)^2 =$ |
| 2. $3a(2x + 1) - 2y(2x + 1) - 2yx^2 + 3ax^2 =$ | 8. $25x^2 - 9y^2 - 10x - 12y + 3 =$          |
| 3. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 =$                 | 9. $x^2y^2(z^4 + 1) - (x^4 + y^4)z^2 =$      |
| 4. $4x^2 - 9y^2 - 8x - 6y + 3 =$               | 10. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) =$ |
| 5. $3a^2x - (3x + 2)(4x^2 - 12x + 9) + 2a^2 =$ | 11. $xy(x - y) + yz(y - z) + xz(z - x) =$    |
| 6. $(x^2 - 9)^2 - 4(x + 3)^2 =$                |  |

Ι. Μερικές ασκήσεις με τις «μυστικές» ταυτότητες (Άθροισμα και διαφορά κύβων):

- |                                |  |                              |
|--------------------------------|--|------------------------------|
| 1. $8x^3 - 27 =$               | 2. $a^3 + 8 =$                               | 3. $27 + x^6 =$              |
| 4. $(2x - 1)^3 + a^3x^3 =$     | 5. $(1 + 2x)^3 - 8y^3 =$                     | 6. $(x + 2)^3 + (1 - x)^3 =$ |
| 7. $(2x + 3)^3 - (x - 1)^3 =$  | 8. $x^2(x^2 - x + 1) + x^4 + x =$            |                              |
| 9. $x^3 - yx^2 + xy - y + 1 =$ | 10. $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) =$ |                              |

Παραδείγματα - Σχόλια:

### **A.16**

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο  $ab^2$  είναι κοινός παράγοντας και των τριών όρων του αθροίσματος, συνεπώς:  $4a^3b^2 + 2ab^3 - ab^2 = ab^2(4a^2 + 2b - 1)$

**Αξίζουν οι 14 , 15 , 17 , 18**

### **B.5**

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες  $x-2$  και  $2-x$  που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων είναι αντίθετες, δηλαδή ισχύει:  $2-x = -(x-2)$ .

Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$4x(x-2) - 2(2-x) = 4x(x-2) + 2(x-2) = 2(x-2)(2x+1)$$

**Αξίζουν οι 2 , 4 , 6 , 7 , 8**

### **Γ.3**

$$2a^2 - 6a - ax + 3x = 2a(a-3) - x(a-3) = (a-3)(2a-x)$$

*Δοκιμάστε να τις λύσετε όλες αν έχετε χρόνο*

### **Δ.3**

$$a^2x^4 - 25 = (ax^2)^2 - 5^2 = (ax^2 - 5)(ax^2 + 5)$$

### **Δ.5**

$$x^4 - a^4 = (x^2)^2 - (a^2)^2 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x-a)(x+a)(x^2 + a^2)$$

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες  $x-2$  και  $2-x$  που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων είναι αντίθετες, δηλαδή ισχύει:  $2-x = -(x-2)$ .

Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$4x(x-2) - 2(2-x) = 4x(x-2) + 2(x-2) = 2(x-2)(2x+1)$$

**Αξίζουν οι 4 , 12 , 13 , 15 , 16 , 17 , 18**

## Ε

Ουσιαστικά η άσκηση ζητάει να γίνει χρήση των ταυτοτήτων:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{και} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Το "κόλπο" είναι να εντοπίσουμε πρώτα τους όρους  $x^2$  και  $y^2$  και έπειτα να επιβεβαιώσουμε με το διπλάσιο γινόμενο, δηλαδή:

### Ε.3

$$9\alpha^2 + 12\alpha x^2 + 4x^4 = (3\alpha)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 = (3\alpha + 2x^2)^2$$

**Αξίζουν οι 2 , 4 , 5 , 9 , 10 , 11 , 12** (η ε.1 δεν λύνεται).

## ΣΤ.8

$$x^3(x + 2) - 4x(x + 2) + \alpha x^2 + 4\alpha x + 4\alpha =$$

$$x(x + 2)(x^2 - 4) + \alpha(x^2 + 4x + 4) =$$

$$x(x + 2)(x^2 - 2^2) + \alpha(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) =$$

$$x(x + 2)(x - 2)(x + 2) + \alpha(x + 2)^2 =$$

$$x(x + 2)^2(x - 2) + \alpha(x + 2)^2 =$$

$$(x + 2)^2 [x(x - 2) + \alpha]$$

*Δοκιμάστε να τις λύσετε όλες αν έχετε χρόνο*

## Z.1

$$x^2 + 2x + 1 - \alpha^2 = (x + 1)^2 - \alpha^2 = (x + 1 - \alpha)(x + 1 + \alpha)$$

## H.1

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$$

Πιο εύκολα, βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου και παραγοντοποιούμε με χρήση της σχέσης:  $\alpha x^2 + bx + c = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

*Δοκιμάστε να παραγοντοποιήσετε το Η.9 (δεν πρέπει να σας δυσκολέψει)*

*Έπειτα δοκιμάστε να επιλύσετε το:  $4x^2 + 8xy + 3y^2 = 0$  ως τριώνυμο του  $x$ , δηλαδή ως τριώνυμο δευτέρου βαθμού με  $\alpha = 4$ ,  $b = 8y$ ,  $c = 3y^2$ .*

## Θ-Ι

Απολαύστε υπεύθυνα!!!