Κεφάλαιο 1ο

Αποτελέσματα 2x2 γραμμικών συστημάτων

1. **Το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι δύο εξισώσεις του** επαληθεύονται από μοναδικό ζεύγος (x,y)

π.χ. $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Ερμηνεία: Οι δύο εξισώσεις περιγράφουν ευθείες που τέμνονται στο σημείο (-1,2)

2. **Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.**

Πότε συμβαίνει: Όταν η μία εξίσωση του συστήματος είναι πολλαπλάσιο της άλλης.

π.χ. $\begin{cases} x-2y=-5 \\ -3x+6y=15 \end{cases}$ Παρατηρούμε ότι -3x+6y=15 ⇔ -3(x-2y)=-3(-5)

Ερμηνεία: Οι δύο εξισώσεις του συστήματος περιγράφουν την ίδια ευθεία.
Συνέπεια: Οι λύσεις τους συστήματος είναι όλα τα σημεία αυτής της ευθείας, δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$x-2y=-5 \Leftrightarrow x=2y-5 \Leftrightarrow (x\,,y)=(2y-5\;,\;y) \text{ με } y\in\mathbb{R}$$

3. **Το σύστημα είναι αδύνατο**

Πότε συμβαίνει: Όταν οι δύο εξισώσεις έχουν το ίδιο πρώτο μέλος και διαφορετικό 2ο μέλος, δηλαδή όταν έχουν τους ίδιους συντελεστές στα x , y και διαφορετική σταθερά.

π.χ. $\begin{cases} x-2y=1 \\ -3x+6y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x-2y)=-3 \\ -3x+6y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+6y=-3 \\ -3x+6y=15 \end{cases}$

Παρατήρηση: Αφού τα πρώτα μέλη των δύο εξισώσεων είναι ίσα, θα έπρεπε και τα δεύτερα μέλη να είναι ίσα.
Ερμηνεία: Οι δύο εξισώσεις του συστήματος περιγράφουν παράλληλες ευθείες. Γιατί; Επειδή οι δύο ευθείες έχουν τους ίδιους συντελεστές στα x , y θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, άρα θα είναι παράλληλες και επειδή έχουν διαφορετικούς σταθερούς όρους, η μία θα αποτελεί παράλληλη μετατόπιση της άλλης.
Συνέπεια: Οι παράλληλες ευθείες δεν τέμνονται (δεν έχουν κοινά σημεία), άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

<u>Επίλυση συστήματος με τη μέθοδο των οριζουσών</u>:

Για να την εφαρμόσουμε φέρνουμε το σύστημα στη μορφή: $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

$$D_X = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

(προκύπτει από την D , αντικαθιστώντας τη στήλη των συντελεστών του x με τη στήλη των σταθερών)

$$D_Y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

(προκύπτει από την D , αντικαθιστώντας τη στήλη των συντελεστών του y με τη στήλη των σταθερών)

<u>Περιπτώσεις</u>:

- Αν **D≠0** το σύστημα έχει μοναδική λύση την: $x = \dfrac{D_X}{D}$, $y = \dfrac{D_Y}{D}$
- Αν **D=0** τότε:
  i. Αν επιπλέον **$D_X = D_Y = 0$** το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
  ii. Αν **$D_X \neq 0$ ή $D_Y \neq 0$** το σύστημα είναι αδύνατο.

<u>Ασκήσεις</u>:

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία:
   (i) (2,4) και (2,-5)
   (ii) (3,4) και (7,4)
   (iii) (1,2) και (-5,7)

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία:
   (i) (3,5) και (1,1)
   (ii) (-1,4) και (-1,-4)
   (iii) (1,2) και (-5,2)

3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}(\lambda+1)x+8y=4\lambda\\ \lambda x+(\lambda+3)y=3\lambda-1\end{cases}$ για κάθε τιμή του λ

4. Να λύσετε το 3x3 γραμμικό σύστημα: $\begin{cases}4x+y-3w=11\\ 2x-3y+2w=9\\ x+y+w=-3\end{cases}$

5. Να λύσετε το 3x3 γραμμικό σύστημα: $\begin{cases}2x-y+w=4\\ -x+y+2w=-9\\ x+y+w=2\end{cases}$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

(i) $\begin{cases}(\sqrt{5}-2)x+3y=-2\\ x+(\sqrt{5}+2)y=2-\sqrt{5}\end{cases}$, (ii) $\begin{cases}2(x-y)-3x=3y\\ 2(y+8)=3(x-4)-6\end{cases}$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

(i) $\begin{cases}x+(\sqrt{3}-5)y=5-\sqrt{3}\\ (\sqrt{3}+5)x-y=5+\sqrt{3}\end{cases}$, (ii) $\begin{cases}2(x-y)+5(x+y)=7\\ -3(x-y)+2(x+y)=-1\end{cases}$

<u>Επιπλέον ασκήσεις</u>:

1. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases}(\lambda+2)x+\lambda y=1\\ 3x+(2-\lambda)y=1\end{cases}$, (ii) $\begin{cases}\lambda x-y=\lambda^2\\ x-\lambda y=\lambda^4\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\lambda^2x=\lambda+2y\\ \lambda x+1=\lambda+y\end{cases}$, (iv) $\begin{cases}\lambda x+\lambda y-y=3\lambda+2\\ 2x+\lambda y=8+y\end{cases}$

(v) $\begin{cases}(2\lambda-3)x=\lambda+4-y\\ 5\lambda x-3\lambda=2-3y\end{cases}$, (vi) $\begin{cases}y=(\lambda-2)x\\ y-\lambda x=2\end{cases}$

2. Ποια είναι η μικρότερη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η παράσταση:

$$A = |x - y - 12| + |x - 3y| + 2021$$

Υπάρχουν x , y ώστε να λάβει αυτή την τιμή; Ποια είναι αυτά;

3. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{w}{5} \\ 2x - 5y + 3w = 32 \end{cases} \quad , \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{w-1}{5} \\ 6x + 2y + w = 44 \end{cases}$$