BOLZANO

1) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot ημx + συνx$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0 \quad , \alpha < \beta$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα (α, β).

3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \alpha ημx + \beta \quad , \alpha > 0 , \beta > 0$ έχει τουλάχιστο μια θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει τον αριθμό α+β .

4) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

5) Δύο συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) - g(x) = cx \quad , c \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1 , \rho_2 \in \Delta$ με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $[\rho_1 , \rho_2]$.

6) Να αποδείξετε ότι κάθε θετικός αριθμός α έχει νιοστή ρίζα $(\nu \in \mathbb{N}, \nu > 1)$ και μάλιστα μικρότερη από τον αριθμό α+1.

7) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y=x .

8) Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με f(0)=g(1) , f(1)=g(0) και g(0)≠g(1) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (0,1)$ με $f(x_o) = g(x_o)$.

9) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ όπου α,β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \beta]$ με γ·f(γ)=α·β .

10) Αν α,β,γ είναι θετικοί αριθμοί και $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με λ<μ<ν , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$ έχει μια ρίζα στο διάστημα (λ, μ) και μια ρίζα στο διάστημα (μ, ν).

11) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(2\alpha^4+7)x^6-\alpha^2x^5+(\alpha-1)x^3-\alpha x-3=0$ έχει τουλάχιστο μια θετική ρίζα μικρότερη του 1.

12) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^7+3x^3+x-1$ μηδενίζεται μόνο μια φορά στο $(0,1)$.

13) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x^2-\alpha x-2$ έχει ρίζα στο $[0,1]$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

14) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^{11}+\frac{25}{x^2+1}=139$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

15) Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $\eta\mu(\eta\mu x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

16) Δίνεται η εξίσωση: $x^3+\kappa x^2+\lambda=0$ με $\lambda>0$ και $\kappa+\lambda+1<0$. Να δείξετε πως και οι τρεις ρίζες είναι πραγματικές.

17) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=x-1$ τέμνονται τουλάχιστο μια φορά.

18) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $(x+1)\cdot 2^{x+1}=1$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(-1,0)$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$. Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $[0,1]$.

20) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-x+5$ μπορεί να πάρει την τιμή 6 για κάποιο $x\in(-3,3)$.

21) Δίνεται η εξίσωση: $\ln x+\alpha x=0 \quad , 0<\alpha<e$. Να δείξετε ότι έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

22) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η εξίσωση $f(f(x))=x$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, να δείξετε ότι και η εξίσωση $f(x)=x$ έχει επίσης μία πραγματική ρίζα.