Επαναληπτικές ασκήσεις Ολοκληρωτικού Λογισμού

1) Αν για την $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με f' συνεχή ισχύει:

$\int_0^\pi f'(x)\eta\mu^2 x\,dx = \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \pi$ να δείξετε ότι υπάρχει

$x_0\in(0,2)\,:\, f'(x_0)=2$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi f'(x)\eta\mu^2 x\,dx &= \pi\\ \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx &= \pi\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx+\int_0^\pi f'(x)\eta\mu^2 x\,dx = 2\pi \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f'(x)\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx = 2\pi \Rightarrow \int_0^\pi f'(x)\,dx = 2\pi \Rightarrow \left[f(x)\right]_0^\pi = 2\pi \Rightarrow$$

$$f(\pi)-f(0)=2\pi \Rightarrow \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}=2 \overset{\Theta.M.T.}{\Rightarrow} f'(x_0)=2$$

2) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $f'(x)+2f(x)=e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)e^{2x}-e^x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή και να υπολογίσετε

την τιμή του $\int_0^1 f(x)\left(x^\nu-\nu x^{\nu-1}\right)dx$.

Λύση:

Με τη βοήθεια της δοσμένης σχέση δείχνουμε ότι $g'(x)=0$ και έπειτα υπολογίζουμε τον τύπο της f(x) χρησιμοποιώντας το δεδομένο f(0)=1.

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι παράγωγος γινομένου.

3) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\left(f(x)\right)^2>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και

$f(\beta)=3f(\alpha)$. Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\ln 3$.

Λύση:

$$f'(x)=\left(f(x)\right)^2>0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=f(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

4) (i) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $x+\frac{1}{x}\geq 2$

(ii) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με $\int_0^1 e^{f(x)}\,dx=1$ να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx\geq 1$.

Λύση:

(i) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$

(ii) $\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx\geq 1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{-f(x)}\,dx+\int_0^1 e^{f(x)}\,dx\geq 2 \Leftrightarrow \int_0^1\left(e^{-f(x)}+e^{f(x)}\right)dx\geq\int_0^1 2\,dx$

το οποίο ισχύει, αφού: $\left(e^{-\frac{f(x)}{2}}-e^{\frac{f(x)}{2}}\right)^2\geq 0$

5) (i) Αν $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta>0$ να δείξετε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)\,dx=\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx$

(ii) Αν, επιπλέον ισχύει $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=\beta x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx=\frac{\alpha^3\beta}{3}$

Λύση:

(i)Με αντικατάσταση u=2α-x

(ii)Αντικαθιστώντας πρώτα το x με το x-α παίρνουμε: $f(x)+f(2\alpha-x)=\beta(x-\alpha)^2$ και έπειτα ολοκληρώνουμε κατά μέλη.

6) Αν ισχύει: $\int_\pi^{2\pi}\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=A$, να υπολογίσετε το $\int_\pi^{2\pi}\frac{\eta\mu x}{x}\,dx$

Λύση:

Κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

7) (i) Να δείξετε ότι: $\int_0^x\frac{t^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\int_0^x\frac{t^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt=1$

Λύση:

Αντικατάσταση u=x-t και έπειτα εύκολα.

8) Να δείξετε ότι: $\int_{-1}^{1} f(x^2t^2)\eta\mu(xt)\,dt \;=\; 0$

Λύση:

Αντικατάσταση u=-t

9) Αν ισχύει: $f''(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, $f'(0)=2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left[\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2\right]dx$

Λύση:

Είναι: $\left[\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2\right]'=2f'(x)f''(x)-2f(x)f'(x)=2f'(x)\left(f''(x)-f(x)\right)=0$

10) Αν $f''(x)$ συνεχής στο $[0\,,\pi]$ με $f(\pi)=-f(0)$ να υπολογίσετε την τιμή του $I=\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx$

Λύση:

$$I=\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx \;=\; \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x\,dx+\underbrace{\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x\,dx}_{\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες}}$$

και ξανά σε αυτό που θα προκύψει.

11) Να βρείτε την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f'(0)=2$, για την οποία ισχύει: $\int_0^x e^{-x}\left(f(x)+f''(x)\right)dx \;=\; 2\int_0^x e^{-x}f'(x)\,dx$

Λύση:

Τα $\int_0^x e^{-x}f''(x)\,dx$, $\int_0^x e^{-x}f'(x)\,dx$ με κατά παράγοντες.

12) Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{1}{2}+f(x_0)-x_0$$

Λύση:

Επειδή $g(x)=f(x)-x$ συνεχής, θα παίρνει μέγιστη τιμή στο [0,1] δηλαδή θα υπάρχει $x_0\in[0,1]$: $g(x)\le g(x_0) \Rightarrow \int_0^1 g(x)\,dx \le \int_0^1 g(x_0)\,dx \Rightarrow$

$$\int_0^1 (f(x)-x)\,dx \le g(x_0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \le f(x_0)-x_0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}\le f(x_0)-x_0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{1}{2}+f(x_0)-x_0$$

13) Να βρεθεί $\nu\in\mathbb{N}^*$: $24\int_0^{\pi/2} \eta\mu^\nu x\,\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx=1$

Λύση:

$\int_0^{\pi/2} \eta\mu^\nu x\,\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^\nu x\left(1-\eta\mu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu x\,dx$ και θέτουμε u=ημx

14) Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)\,dy\right)dx-\int_0^1 f(x)\,dx$$

Λύση:

$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)\,dy\right)dx=\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 f(y)\,dy$ και καταλήγουμε: c^2-c

15) Να αποδείξετε ότι: $I=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)dx=0$

Λύση:

Θέτουμε $u=\frac{\pi}{2}-x$ και καταλήγουμε $I=-I$

16) Αν $f:\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ συνεχής , να δείξετε ότι: $\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x\,dx$

Λύση:

Θέτουμε $u=\dfrac{\pi}{2}-x$

17) Αν $f:[0\,,1]\to\mathbb{R}$ με f' συνεχής και $f(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in[0\,,1]\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(1)=1$

υπολογίσετε το: $\int_0^1 \dfrac{f'(x)-f(x)}{f(x)+e^x}\,dx$

Λύση:

$$\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{f(x)+e^x}\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{f'(x)+e^x-e^x-f(x)}{f(x)+e^x}\,dx \;=\; \int_0^1\left(\frac{\left(f(x)+e^x\right)'}{f(x)+e^x}-1\right)dx$$

18) Αν $f''(x)<0\ ,\ \forall x\in[0\,,1]\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(1)=1$ να αποδείξετε ότι:

$\int_0^1 f(x)\,dx\geq\dfrac{1}{2}$

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(x)\geq x\ ,\ \forall x\in[0,1]$ αφού τότε:

$$f(x)\geq x\ ,\ \forall x\in[0,1]\ \Rightarrow\ \int_0^1 f(x)\,dx\geq\int_0^1 x\,dx\ \Rightarrow\ \int_0^1 f(x)\,dx\geq\frac{1}{2}$$

Για κάθε $x\in(0\,,1)$, από Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [0 , x] και [x , 1] θα υπάρχουν:

- $\xi_1\in(0\,,x)\ :\ f'(\xi_1)\;=\;\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\;=\;\dfrac{f(x)}{x}$
- $\xi_2\in(x\,,1)\ :\ f'(\xi_2)\;=\;\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}\;=\;\dfrac{1-f(x)}{1-x}$

και επειδή $f''(x)<0\ ,\ \forall x\in[0\,,1]\ \Rightarrow\ f'\searrow$ στο [0 , 1] , άρα για:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1-f(x)}{1-x} \Rightarrow (1-x)f(x) > x\big(1-f(x)\big)$$

$$\Rightarrow f(x) > x$$

και επειδή, επιπλέον: $f(0)=0$, $f(1)=1$ τελικά είναι: $f(x) \geq x$, $\forall x \in [0,1]$.

19) Αφού δείξετε ότι: $\dfrac{4x^2+1}{x^2+1} < 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{4t^2+1}{t^2+1}\,dt$$

Λύση:

$$\frac{4x^2+1}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-3}{x^2+1} = 4-\frac{3}{x^2+1} < 4 \Rightarrow 4-\frac{3}{x^2} < \frac{4x^2+1}{x^2+1} < 4$$ και έπειτα κριτήριο παρεμβολής αφού τα $\int_x^{x+2} 4-\dfrac{3}{t^2}\,dt$ και $\int_x^{x+2} 4\,dt$ υπολογίζονται.

20) Αν f συνεχής στο [0 , 1] να δείξετε ότι: $\int_0^x f(t)\,dt = x\int_0^1 f(xt)\,dt$, $\forall x \in [0,1]$

Αν επιπλέον είναι και γνησίως φθίνουσα στο [0 , 1] να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_0^x f(t)\,dt \geq x\int_0^1 f(t)\,dt \ , \ \forall x \in [0,1]$$

Λύση:

Θέτουμε $u=\dfrac{t}{x}$, $x \in (0,1)$ τότε: $x\,du = dt$, $t=0 \Rightarrow u=0$, $t=x \Rightarrow u=1$

οπότε: $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(xu)x\,du = x\int_0^1 f(xu)\,du = x\int_0^1 f(xt)\,dt \quad (1)$, σχέση που ισχύει και για x=0 και x=1 , όπως φαίνεται, άμεσα, με αντικατάσταση.

Είναι: $\int_0^x f(t)\,dt - x\int_0^1 f(t)\,dt \overset{(1)}{=} x\int_0^1 f(xt)\,dt - x\int_0^1 f(t)\,dt = x\int_0^1 \big(f(xt)-f(t)\big)\,dt$

και επειδή $x \in (0,1)$, $t \in [0,1] \Rightarrow xt < t \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) < f(xt) \Rightarrow f(xt)-f(x) > 0$.

21) Αν $f'(x)$ συνεχής στο $[\alpha\,,\,\beta]$ και ισχύει: $\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx = \int_\alpha^\beta (f'(x))^2\,dx = 1$ να δείξετε ότι: $(f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2 \le 2$.

Λύση:

$$(f(x)-f'(x))^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; \int_\alpha^\beta (f(x)-f'(x))^2\,dx \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx + \int_\alpha^\beta (f'(x))^2\,dx \ge \int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx \;=\; \left[(f(x))^2\right]_\alpha^\beta$$

22) Αν $f(x)$ συνεχής στο $[0\,,\,1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\int_0^x f(t)\,dt = 2022\int_x^1 f(t)\,dt$ έχει λύση στο $[0\,,\,1]$.

Λύση:

Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2022\int_x^1 f(t)\,dt$ στο [0 ,1]

23) (i) Να δείξετε ότι $\int_{1/5}^{5} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{1/x}^{x} \frac{t+\ln t}{t^2+1}\,dt = 1$ στο διάστημα $(0\,,+\infty)$

Λύση:

Αντικατάσταση με Θεώρημα Bolzano για την $u = \frac{1}{x}$

24) Να βρεθεί συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με συνεχή 2η παράγωγο για την οποία ισχύουν: $1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt \;=\; \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$ και $f(0)=2022$, $f'(0)=1$.

Λύση:

$$1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt \;=\; \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt \;\Rightarrow$$

$$1+\left[f'(t)\sigma\upsilon\nu t\right]_0^x - \int_0^x f'(t)\left(\sigma\upsilon\nu t\right)'dt \;=\; \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$$