Επαναληπτικές ασκήσεις Ολοκληρωτικού Λογισμού

1) Αν για την $f:[0\,,\pi]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με f' συνεχή ισχύει:

$\int_0^{\pi} f'(x)\eta\mu^2 x\, dx \;=\; \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\, dx \;=\; \pi$ να δείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (0\,,2)\;:\; f'(x_0)=2$

2) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $f'(x)+2f(x)=e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)e^{2x}-e^{x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή και να υπολογίσετε

την τιμή του $\int_0^1 f(x)\left(x^{\nu}-\nu x^{\nu-1}\right)dx$.

3) Έστω $f:[\alpha\,,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\left(f(x)\right)^2>0$, $\forall x\in[\alpha\,,\beta]$ και

$f(\beta)=3f(\alpha)$. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\ln 3$.

4) (i) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$

(ii) Έστω $f:[0\,,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με $\int_0^1 e^{f(x)}\,dx=1$ να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx\ge 1$.

5) (i) Αν $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\alpha\,,\beta>0$ να δείξετε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)\,dx=\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx$

(ii) Αν, επιπλέον ισχύει $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=\beta x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^3\beta}{3}$

6) Αν ισχύει: $\int_{\pi}^{2\pi} \ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=A$, να υπολογίσετε το $\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{\eta\mu x}{x}\,dx$

7) (i) Να δείξετε ότι: $\int_0^x \frac{t^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt \;=\; \int_0^x \frac{(x-t)^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\int_0^x \frac{t^2}{t^2+(x-t)^2}\,dt \;=\; 1$

8) Να δείξετε ότι: $\int_{-1}^{1} f(x^2t^2)\,\eta\mu(xt)\,dt \;=\; 0$

9) Αν ισχύει: $f''(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, $f'(0)=2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left[\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2\right]dx$

10) Αν $f''(x)$ συνεχής στο $[0\,,\pi]$ με $f(\pi)=-f(0)$ να υπολογίσετε την τιμή του $I=\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx$

11) Να βρείτε την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f'(0)=2$, για την οποία ισχύει:
$\int_0^x e^{-x}\left(f(x)+f''(x)\right)dx \;=\; 2\int_0^x e^{-x}f'(x)\,dx$

12) Αν $f:[0\,,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0\,,1]$ τέτοιο ώστε:
$\int_0^1 f(x)\,dx \;\le\; \frac{1}{2}+f(x_0)-x_0$

13) Να βρεθεί $\nu\in\mathbb{N}^*$: $24\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu}x\,\sigma\upsilon\nu^3x\,dx=1$

14) Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)\,dy\right)dx-\int_0^1 f(x)\,dx$$

15) Να αποδείξετε ότι: $I=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\dfrac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)dx=0$

16) Αν $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ συνεχής, να δείξετε ότι: $\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x\,dx$

17) Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με f' συνεχής και $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

υπολογίσετε το: $\int_0^1\dfrac{f'(x)-f(x)}{f(x)+e^x}\,dx$

18) Αν $f''(x)<0$, $\forall x\in[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geq\frac{1}{2}$$

19) Αφού δείξετε ότι: $\dfrac{4x^2+1}{x^2+1}<4$, $\forall x\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{4t^2+1}{t^2+1}\,dt$$

20) Αν f συνεχής στο $[0\,,\,1]$ να δείξετε ότι: $\int_0^x f(t)\,dt=x\int_0^1 f(xt)\,dt$, $\forall x\in[0,1]$

Αν επιπλέον είναι και γνησίως φθίνουσα στο $[0\,,\,1]$ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_0^x f(t)\,dt\geq x\int_0^1 f(t)\,dt\ ,\ \forall x\in[0,1]$$

21) Αν $f'(x)$ συνεχής στο $[\alpha , \beta]$ και ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\right)^2 dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(f'(x)\right)^2 dx = 1$ να δείξετε ότι: $\left(f(\beta)\right)^2 - \left(f(\alpha)\right)^2 \le 2$.

22) Αν $f(x)$ συνεχής στο $[0 , 1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$\int_0^x f(t)\,dt = 2022\int_x^1 f(t)\,dt$ έχει λύση στο $[0 , 1]$.

23) (i) Να δείξετε ότι $\int_{1/5}^{5} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{1/x}^{x} \frac{t+\ln t}{t^2+1}\,dt = 1$ στο διάστημα $\left(0 , +\infty\right)$

24) Να βρεθεί συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με συνεχή 2^{η} παράγωγο για την οποία ισχύουν: $1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$ και $f(0)=2022$, $f'(0)=1$.