

Επαναληπτικές ασκήσεις Διαφορικού Λογισμού

1) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και ισχύει: $x < f'(x) < x + 1$, $\forall x > 0$ να

βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$

Λύση:

$$x < f'(x) < x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) - x > 0 \\ f'(x) - x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - \frac{x^2}{2} & \text{γνησίως αύξουσα} \\ f(x) - \frac{x^2}{2} - x & \text{γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$$

για κάθε $x \geq 0$.

$$\text{Άρα για } x \geq 0 \Rightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} \geq f(0) - 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) + \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως για } x \geq 0 \Rightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} - x \leq f(0) - 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) + \frac{x^2}{2} + x \quad (2)$$

Οπότε, από

$$(1), (2) \Rightarrow f(0) + \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq f(0) + \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow \frac{f(0)}{x^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{f(0)}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$$

και επειδή: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(0)}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(0)}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$ από κριτήριο παρεμβολής θα

$$\text{είναι και: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2) Αν ισχύει $f''(x) > 0$, $\forall x \in [0, 2]$ να δείξετε ότι: $f(0) + f(2) > 2f(1)$

Λύση:

$$f(0) + f(2) > 2f(1) \Leftrightarrow f(2) - f(1) > f(1) - f(0) \Leftrightarrow \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} > \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

και επειδή για την f ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$

τότε θα υπάρχουν: $\xi_1 \in (0, 1)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$ και $\xi_2 \in (1, 2)$: $f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$

και επειδή $f''(x) > 0$, $\forall x \in [0, 2]$ η $f'(x)$ \nearrow στο $[0, 2]$, οπότε για

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} < \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f(2) + f(0) > 2f(1)$$

3) Αν $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύουν

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$ να δείξετε ότι:

(i) υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f(x_0) = x_0$

(i) υπάρχουν $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 : f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$

Λύση:

Bolzano για την $g(x)=f(x)-x$ και έπειτα ΘΜΤ για την $f(x)$ στα $[0,x_0]$ και $[x_0,1]$

4) (i) Να μελετηθεί η $g(x) = xe^{x+2}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(ii) Αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το όλο το \mathbb{R} να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)e^{f(x)+2} = -1$ έχει λύση.

Λύση:

Είναι: $g'(x) = (x+1)e^{x+2}$, οπότε η $g(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $g(-1) = -e$ και είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, οπότε επειδή $g([-1, +\infty)) = [-e, +\infty)$

θα υπάρχει $m > -1 : g(m) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = g(f(x)) + 1 = f(x)e^{f(x)+2} + 1$ που είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή η $f(x)$ έχει σύνολο τιμών το όλο το \mathbb{R} , θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

$f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = m$.

Οπότε: $h(\alpha) = g(f(\alpha)) + 1 = -e + 1 < 0$ και $h(\beta) = g(f(\beta)) + 1 = 0 + 1 > 0$

Άρα από Θ.Bolzano στο ανοικτό διάστημα που ορίζεται από τα α, β θα υπάρχει $\xi : h(\xi) = 0$.

5) Αν ισχύει: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ να βρεθεί ο τύπος της f και η μονοτονία της.

Λύση:

Είναι: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Rightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} - 1 = 0 \xrightarrow{y=e^{f(x)} > 0} y^2 - 2xy - 1 = 0$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

6) Αν $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και η f δεν είναι 1-1, να δείξετε ότι έχει ελάχιστο.

Λύση:

Αφού η f δεν είναι 1-1, υπάρχουν $\alpha < \beta : f(\alpha) = f(\beta)$, τότε από Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$ θα υπάρχει $x_0 : f'(x_0) = 0$ και επειδή f' γνησίως αύξουσα θα είναι:

- $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $(-\infty, x_0]$
- $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $[x_0, +\infty)$

7) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha\beta < 0$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x + \gamma$ δεν έχει τρία συνευθειακά σημεία.

Λύση:

Έστω ότι έχει τα $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$, με $x_1 < x_2 < x_3$.

Από ΘΜΤ στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ θα υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 : f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Από Θ.Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ το ζητούμενο.

8) Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $f'(x) = f(x)$.

Λύση:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}f'(x) + (e^{-x})' f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 0$$

και με Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την $g(x) = e^{-x}f(x)$ το ζητούμενο.

9) (i) Να βρείτε την εφαπτομένη της $g(x)=e^x$ στο $x=0$

(ii) Αν ισχύει ότι $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = 2e^{f(x)} - f^2(x), x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση:

Η $g(x)$ ως κυρτή συνάρτηση θα βρίσκεται υπεράνω της εφαπτομένης της.

10) Αν ισχύει ότι $f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(i) να βρείτε τη μονοτονία της $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$

(ii) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

Λύση:

$$f'(x) \geq 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)' > 0 \Rightarrow g(x) = f(x) - \frac{x}{2} \nearrow$$

$$\text{Αν } x_1 > 0 \Rightarrow g(x_1) > g(0) \Rightarrow f(x_1) - \frac{x_1}{2} > f(0) \Rightarrow f(x_1) > f(0) + \frac{x_1}{2} > 0$$

για $x_1 > -2f(0)$.

$$\text{Αν } x_2 < 0 \Rightarrow g(x_2) < g(0) \Rightarrow f(x_2) - \frac{x_2}{2} < f(0) \Rightarrow f(x_2) < f(0) + \frac{x_2}{2} < 0$$

για $x_2 < -2f(0)$.