

## Επαναληπτικές ασκήσεις Διαφορικού Λογισμού

1) Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη και ισχύει:  $x < f'(x) < x + 1$  ,  $\forall x > 0$  να

βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$

2) Αν ισχύει  $f''(x) > 0$  ,  $\forall x \in [0, 2]$  να δείξετε ότι:  $f(0) + f(2) > 2f(1)$

3) Αν  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύουν

$f(0) = 1$  ,  $f(1) = 0$  να δείξετε ότι:

(i) υπάρχει  $x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = x_0$

(ii) υπάρχουν  $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 : f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$

4) (i) Να μελετηθεί η  $g(x) = xe^{x+2}$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(ii) Αν η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών το όλο το  $\mathbb{R}$  να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)e^{f(x)+2} = -1$  έχει λύση.

5) Αν ισχύει:  $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$  να βρεθεί ο τύπος της  $f$  και η μονοτονία της.

6) Αν  $f''(x) > 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και η  $f$  δεν είναι 1-1 , να δείξετε ότι έχει ελάχιστο.

7) Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha\beta < 0$  να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x + \gamma$  δεν έχει τρία συνευθειακά σημεία.

8) Αν  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης  $f'(x) = f(x)$  .

9) (i) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $g(x)=e^x$  στο  $x=0$

(ii) Αν ισχύει ότι  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = 2e^{f(x)} - f^2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα.

10) Αν ισχύει ότι  $f'(x) \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

(i) να βρείτε τη μονοτονία της  $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$

(ii) να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μοναδική ρίζα