Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

i. $\int p(x)e^{\alpha x}\,dx \;=\; \int p(x)\left(\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)'dx \;=\; \ldots$

ii. $\int p(x)\sigma\upsilon\nu\alpha x\,dx \;=\; \int p(x)\left(\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha}\right)'dx \;=\; \ldots$

iii. $\int p(x)\eta\mu\alpha x\,dx \;=\; \int p(x)\left(\dfrac{-\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\alpha}\right)'dx \;=\; \ldots$

iv. $\int p(x)\ln(\alpha x)\,dx \;=\; \int g'(x)\ln(\alpha x)\,dx \;=\; \ldots$

Παρατηρήσεις:

Οι παραπάνω είναι οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Υπάρχουν όμως και άλλοι συνδυασμοί, όπως θα δούμε στις ασκήσεις.

Σε μερικές ασκήσεις, καθώς υπολογίζουμε ένα ολοκλήρωμα με την παραγοντική μέθοδο, συναντάμε πάλι το ζητούμενο ολοκλήρωμα μέσα στη σχέση προσδιορισμού του. Στις περιπτώσεις αυτές φέρνουμε το ολοκλήρωμα στο πρώτο μέλος, χωρίς να ξεχάσουμε να τοποθετήσουμε στο δεύτερο μέλος μια σταθερά ολοκλήρωσης.

Ένα παράδειγμα που αντιστοιχεί και στις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις είναι ο υπολογισμός του: $\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Είναι:

$$\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx \;=\; \int \left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x\,dx \;=\; e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx \;=$$

$$e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x\eta\mu x\,dx \;=\; e^x\sigma\upsilon\nu x - \int\left(e^x\right)'\eta\mu x\,dx \;=\; e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x - \int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

Δηλαδή αν I είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $e^x συνx$, τότε:

$$2I = e^x συνx + e^x ημx \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{e^x}{2}(συνx + ημx).$$

Επειδή, όμως, το $\int e^x συνx\,dx$ είναι το σύνολο όλων των παραγουσών θα ισχύει:

$$\int e^x συνx\,dx = \frac{e^x}{2}(ημx + συνx) + c.$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής:
$\int e^{αx} συνβx\,dx$, $\int e^{αx} ημβx\,dx$.

Ασκήσεις:

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
   i) $\int (x^2+3x-1)e^{2x}\,dx$ ii) $\int xσυν5x\,dx$
   iii) $\int (2x^2+4x+1)\ln x\,dx$ iv) $\int (x^2+1)ημx\,dx$

2) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
   i) $\int (\ln x)^2\,dx$ ii) $\int x^2 \ln x\,dx$
   iii) $\int x^2 ημx\,dx$ iv) $\int x^3 e^x\,dx$

$$\int (\ln x)^2 dx = \int (x)'(\ln x)^2 dx = \dots = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,dx = \dots = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\int x^2 ημx\,dx = \int x^2(-συνx)'dx = \dots = -x^2συνx + 2xημx + 2συνx + c$$

$$\int x^3 e^x dx = \int x^3 (e^x)' dx = \dots = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

3) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
   i) $\int e^{2x} συνe^x\,dx$ ii) $\int συνx \ln(1+συνx)\,dx$

$$\int e^{2x}συνe^x dx = \int e^x \cdot e^x συνe^x dx = \int e^x (ημe^x)'dx =$$

$$e^x ημe^x - \int e^x ημe^x dx = e^x ημe^x - \int (-συνe^x)' dx =$$

$$e^x ημe^x - (-συνe^x) + c = e^x(ημe^x + συνe^x) + c$$

$$\int \sigma\upsilon\nu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1)\,dx = \int (\eta\mu x)' \ln(\sigma\upsilon\nu x+1)\,dx =$$

$$\eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) - \int \eta\mu x \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+1}\,dx = \eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) + \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x+1}\,dx =$$

$$\eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) + \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) + \int (1-\sigma\upsilon\nu x)\,dx =$$

$$\eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) + \int 1\,dx - \int \sigma\upsilon\nu x\,dx =$$

$$\eta\mu x \ln(\sigma\upsilon\nu x+1) + x - \eta\mu x + c$$

4) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ ii) $\int x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \ln x\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$-\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{x^{-2}}{4} + c$$

$$\int x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int x^2 \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 + \frac{1}{2}\int x^2 \sigma\upsilon\nu 2x\,dx =$$

$$\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\int x^2 \left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)' dx = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 \frac{\eta\mu 2x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int x\,\eta\mu 2x\,dx =$$

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \eta\mu 2x}{4} - \frac{1}{2}\int x \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)' dx =$$

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \eta\mu 2x}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx\right] =$$

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \eta\mu 2x}{4} + \frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{4} - \frac{1}{4}\int \left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)' dx =$$

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \eta\mu 2x}{4} + \frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{4} - \frac{\eta\mu 2x}{8} + c$$

5) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ ii) $\int x\eta\mu 2x \, dx$ iii) $\int x3^x \, dx$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln^3 x \, dx = -\frac{1}{x}\ln^3 x + \int \frac{1}{x} 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$-\frac{\ln^3 x}{x} + 3\int \frac{1}{x^2}\ln^2 x \, dx = -\frac{\ln^3 x}{x} + 3\int \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln^2 x \, dx =$$

$$-\frac{\ln^3 x}{x} + 3\left[-\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx\right] =$$

$$-\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + 6\int \frac{1}{x^2}\ln x \, dx = -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + 6\int \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x \, dx =$$

$$-\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + 6\left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx\right] =$$

$$-\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{6\ln x}{x} - \frac{6}{x} + c$$

$$\int x\eta\mu 2x \, dx = \int x\left(\frac{-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)' dx = -\frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx =$$

$$-\frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 2x}{4} + c$$

$$\int x \cdot 3^x dx = \int x\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)' dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx =$$

$$\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + c$$

6) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ ii) $\int x^2 \ln(1+x)\,dx$

$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \int [\ln(\ln x)](\ln x)'dx = [\ln(\ln x)]\cdot \ln x - \int \ln x[\ln(\ln x)]'dx =$

$[\ln(\ln x)]\ln x - \int \ln x \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx = [\ln(\ln x)]\ln x - \int (\ln x)'dx =$

$[\ln(\ln x)]\ln x - \ln x + c$

$\int x^2 \ln(1+x)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \ln(1+x)dx = \frac{1}{3}\int (x^3+1)'\ln(1+x)dx =$

$\frac{1}{3}\left[(x^3+1)\ln(1+x) - \int \frac{x^3+1}{x+1}dx\right] = \frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx =$

$\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3} - \frac{1}{3}\int (x^2-x+1)dx = \frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + c$

- Αν το x^2 δεν το γράψουμε ως $(x^3+1)'$ αλλά σκέτο $(x^3)'$ θα καταλήξουμε σε $\int \frac{x^3}{1+x}dx$ και θα προσθαφαιρέσουμε το 1 στον αριθμητή.

7) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int ημ(\ln x)\,dx$ ii) $\int ημx\,ημ3x\,dx$

$\int ημ(\ln x)dx = \int (x)'ημ(\ln x)dx = xημ(\ln x) - \int x\frac{συν(\ln x)}{x}dx =$

$xημ(\ln x) - \int συν(\ln x)dx = xημ(\ln x) - \int (x)'συν(\ln x)dx =$

$xημ(\ln x) - \left[xσυν(\ln x) + \int x\frac{ημ(\ln x)}{x}dx\right] =$

$xημ(\ln x) - xσυν(\ln x) - \int ημ(\ln x)dx \Leftrightarrow$

$2\int ημ(\ln x)dx = x(ημ(\ln x) - συν(\ln x)) + c \Leftrightarrow$

$\int ημ(\ln x)dx = \frac{x}{2}(ημ(\ln x) - συν(\ln x)) + c'$

$$\int ημx\,ημ3x\,dx = -\int (συνx)'\,ημ3x\,dx = -συνx\,ημ3x + \int 3συν3x\,συνx\,dx =$$

$$-συνx\,ημ3x + 3\int συν3x\,(ημx)'\,dx =$$

$$-συνx\,ημ3x + 3\left[συν3x\,ημx + 3\int ημx\,ημ3x\,dx\right] =$$

$$-συνx\,ημ3x + 3συν3x\,ημx + 9\int ημx\,ημ3x\,dx \iff$$

$$-8\int ημx\,ημ3x\,dx = 3συν3x\,ημx - συνx\,ημ3x + c \iff$$

$$\int ημx\,ημ3x\,dx = -\frac{3}{8}συν3x\,ημx + \frac{1}{8}συνx\,ημ3x + c'$$

8) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ ii) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$ iii) $\int \frac{x}{συν^2 x}dx$

- $$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \int (x)'\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)'dx =$$

$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,\frac{\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1}}\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

- $$\int x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{x}{1+x}\left(\frac{1+x}{x}\right)'dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{x}{1+x}\,\frac{x-1-x}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \int \frac{-x}{2(1+x)}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int x(\varepsilon\varphi x)'dx = x\varepsilon\varphi x - \int \varepsilon\varphi x dx = x\varepsilon\varphi x - \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx =$$

$$x\varepsilon\varphi x + \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx = x\varepsilon\varphi x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

9) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ ii) $\int x\varepsilon\varphi^2 x\, dx$

- $$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int xe^x\left(-\frac{1}{1+x}\right)'dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(xe^x)'dx =$$

$$-\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x + xe^x}{1+x}dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{(1+x)e^x}{1+x}dx =$$

$$-\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = e^x - \frac{xe^x}{1+x} + c$$

- $$\int x\varepsilon\varphi^2 x\, dx = \int x\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int x\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx =$$

$$\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - \int x dx = \int x(\varepsilon\varphi x)'dx - \frac{x^2}{2} =$$

$$x\varepsilon\varphi x - \int \varepsilon\varphi x (x)'dx - \frac{x^2}{2} =$$

$$x\varepsilon\varphi x - \int \varepsilon\varphi x\, dx - \frac{x^2}{2} = x\varepsilon\varphi x - \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx - \frac{x^2}{2} =$$

$$x\varepsilon\varphi x + \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx - \frac{x^2}{2} =$$

$$x\varepsilon\varphi x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{x^2}{2} + c$$

10) Να βρεθούν αναδρομικοί τύποι για τα ολοκληρώματα:

i) $\int (\ln x)^{\nu}\,dx$ ii) $\int \dfrac{dx}{\eta\mu^{\nu}x}$

iii) $\int \dfrac{e^{x}}{(x+1)^{\nu}}\,dx$ iv) $\int \varepsilon\varphi^{\nu}x\,dx$

• $\int (\ln x)^{\nu} dx = \int (x)'(\ln x)^{\nu} dx = x(\ln x)^{\nu} - \int x\cdot\nu\cdot(\ln x)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$x(\ln x)^{\nu} - \nu\int(\ln x)^{\nu-1}dx.$ Θέτοντας: $a_n = \int (\ln x)^{\nu} dx$

έχουμε: $a_{\nu} = x(\ln x)^{\nu} - \nu\cdot a_{\nu-1}$

• $\int \dfrac{dx}{\eta\mu^{\nu}x} = \int \dfrac{dx}{\eta\mu^{\nu-2}x\cdot\eta\mu^{2}x} = -\int \dfrac{(\sigma\varphi x)'}{\eta\mu^{\nu-2}x}dx =$

$-\dfrac{\sigma\varphi x}{\eta\mu^{\nu-2}x} + \int \sigma\varphi x\,\dfrac{-(\nu-2)\,\eta\mu^{\nu-3}x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{2\nu-4}x}dx =$

$-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1}x} + \int \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{-(\nu-2)\eta\mu^{\nu-3}x\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{2\nu-4}x}dx =$

$-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \dfrac{\eta\mu^{\nu-3}x\,\sigma\upsilon\nu^{2}x}{\eta\mu^{2\nu-3}x}dx =$

$-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \dfrac{1-\eta\mu^{2}x}{\eta\mu^{\nu}x}dx =$

$-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \dfrac{1}{\eta\mu^{\nu}x}dx + (\nu-2)\int \dfrac{1}{\eta\mu^{\nu-2}x}dx$

Θέτουμε: $a_\nu = \int \frac{1}{\eta\mu^\nu x} dx$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$a_\nu = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1} x} - (\nu-2) a_\nu + (\nu-2) a_{\nu-2} \Leftrightarrow$$

$$a_\nu + (\nu-2) a_\nu = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1} x} + (\nu-2) a_{\nu-2} \Leftrightarrow$$

$$(\nu-1) a_\nu = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1} x} + (\nu-2) a_{\nu-2} \Leftrightarrow$$

$$a_\nu = -\frac{1}{\nu-1} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{\nu-1} x} + \frac{\nu-2}{\nu-1} a_{\nu-2}$$

- $\int \frac{e^x}{(x+1)^\nu} dx = \int \frac{(e^x)'}{(x+1)^\nu} dx = \frac{e^x}{(x+1)^\nu} - \int e^x \left[\frac{1}{(x+1)^\nu}\right]' dx =$

$$\frac{e^x}{(x+1)^\nu} + \int e^x \frac{\nu (x+1)^{\nu-1}}{(x+1)^{2\nu}} dx = \frac{e^x}{(x+1)^\nu} + \nu \int \frac{e^x}{(x+1)^{\nu+1}} dx$$

Θέτουμε $a_\nu = \int \frac{e^x}{(x+1)^\nu} dx$ και παίρνουμε:

$$a_\nu = \frac{e^x}{(x+1)^\nu} + \nu\, a_{\nu+1}$$

- $\int \varepsilon\varphi^\nu x\, dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot \varepsilon\varphi^2 x\, dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$

$$\int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\, dx =$$

$$\int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot (\varepsilon\varphi x)' dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\, dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\, d(\varepsilon\varphi x) - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\, dx =$$

$\frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\, dx$. Θέτουμε $a_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x\, dx$.

Άρα: $a_\nu = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - a_{\nu-2}$