

## Συναρτήσεις – Γραφικές παραστάσεις – Πεδίο ορισμού – Σύνολο τιμών

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} \quad , \quad \beta) f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{3 - \sqrt{x+3}} \quad , \quad \gamma) f(x) = \frac{\ln(x^4 - 1)}{|x-3| - 2}$$

$$\delta) f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{x^2 - 3x + 2}\right) \quad , \quad \varepsilon) f(x) = \frac{\sqrt{3 - |2-x|}}{\ln x}$$

2. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = (x-2)^2 + 5 \quad , \quad \beta) f(x) = (x+7)^3 - 2 \quad , \quad \gamma) f(x) = 5 - (x+2)^2$$

$$\delta) f(x) = 2 - (x-7)^3 \quad , \quad \varepsilon) f(x) = 2 - \ln(x-1) \quad , \quad \sigma\tau) f(x) = \ln(x+3) - 1$$

$$\zeta) f(x) = |\ln(x+1)| - 2 \quad , \quad \eta) f(x) = |\sqrt{x} - 2| \quad , \quad \theta) f(x) = |\sqrt{x-3}|$$

$$\iota) f(x) = \sqrt{-x} \quad , \quad \kappa) f(x) = 2 - \sqrt{3-x} \quad , \quad \lambda) f(x) = |2 - \sqrt{3-x}|$$

3. Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(f(x)) = x + f(x)$  για κάθε  $x$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και  $f(0)=0$ .

4. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2$  είναι συμμετρική ως προς την ευθεία  $y=x$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{5^x}{3+5^x}$ . Να αποδείξετε ότι είναι 1-1, να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης και το σύνολο τιμών της  $f$ .

6. Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως αύξουσα και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως φθίνουσα να δειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x)=g(x)$  έχει το πολύ μία λύση στο  $\mathbb{R}$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x - 1$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει η  $f^{-1}$  και να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x)=f(x)$ . (είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x=f(x)$ , αφού αν τέμνονται οι δύο συναρτήσεις, αυτό θα συμβαίνει στην ευθεία  $y=x$ ).

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα και  $0 \leq f(x) \leq 1$  για κάθε  $x$ . Να δειχθεί ότι η  $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.