

Πεπερασμένο όριο στο x_0

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & 2 < x \leq 3 \\ 2\alpha x - 3\beta, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$

να έχει όριο στα σημεία $x=2$ και $x=3$

2. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha|x-1|}{x-1}(2x^3 - 4)$ έχει όριο στο $x=1$;

3. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + x^2 - 3x + 2}{x-1}$, (v) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3 + |3x-x^2|}{x^2-9}$

4. Να βρείτε τα όρια (μέθοδος συζυγούς παράστασης):

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x}-3}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

5. Να ελέγξετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - x|}{1 + 2x - 3x^2}$

6. Να ελέγξετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2 - 8} - \sqrt[3]{x+6}}{x-2}$

7. Να ελέγξετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}}$

8. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} - x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

9. Να ελέγξετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - \sqrt{x^2 + x^4}}{x^2 - x}$

10. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{x + 4\eta\mu x}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \eta\mu x}}{x}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x}{2x^2 + x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \eta\mu x + 5x}{2x^2 + 3\eta\mu x - 2x}$, (v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{x^3 + 1}$, (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

(vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$, (viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu x} - \sqrt{1 - \eta\mu x}}{x}$, (ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}$

11. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 - 3x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{\eta\mu[\alpha(x-1)]}{x^2 - x}, & x > 1 \end{cases}$

να έχει όριο στο $x=1$.

12. Να βρεθεί η τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(2\alpha + 1)x^2 - 3\eta\mu^2 x}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^2 - 6\beta + \alpha^3, & x \leq 0 \end{cases}$$

να έχει όριο στο $x=0$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

13. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt{f(x)} - 4}{x - 2} = 3$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

14. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x^3 - 3x + 2)) = 2$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$.

15. Αν η f είναι περιττή συνάρτηση και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2x + 1) = 4$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

16. Αν $\frac{x^2}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{1}{\eta\mu(x-1)}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

17. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt[3]{2x+1} - 1} = 2$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

18. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) - x^2 + 2x - 1) = 5$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

19. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{1+x} - x + 1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 3} [g(x)(\sqrt{3x} - 3)] = \frac{1}{2}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x)$.

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x=1$.

2. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + 4}{(x - 2)^2}$ είναι πεπερασμένο;

3. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - 2}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{(x - 2)^3}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\phi x - \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \alpha x - \sqrt{x+1}}{x^2}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να έχει στο $x=0$ όριο πραγματικό αριθμός, ο οποίος να βρεθεί.

5. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 - \sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τα όρια

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2x - 1}{x^2 - x} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - 1} \right) \right]$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + 3}{x^2}$

7. Αν $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{3\eta\mu x - 1}{f(x)} = -\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$

8. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + \lambda x + \mu}{|x + 1|}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

Όρια στο $\pm\infty$

1. Να βρεθεί τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{x + 1} - (\lambda x + \mu) \right) = 1$

2. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 3)\sigma\upsilon\nu x}{x^2 + 1}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 - \sqrt{3x^2 + 5x + 7}}{2x + 7}$, (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$

(vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)\eta\mu^2 x - 3x\sigma\upsilon\nu(x^2)}{4x^2 - x + 1}$, (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{2x^3 + 5x} \right)$

3. Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{\lambda x^2 + x + 3}}{3x - 1} = -\frac{1}{3}$

4. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x \right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{9x^2 + x + 1} - 4x \right)$

5. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \lambda x \right)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Να βρεθεί η τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta \right) = 0$

7. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x) + g^3(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

8. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x^3 - x| + x^2}{x^2 + |x| + 2} + \alpha x + 2 \right)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \alpha x + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

- $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 3x + 4 \right)$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 - 6x + 5} \right)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 4x \sin \theta + 1$. Να βρείτε τις τιμές των $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ να είναι πεπερασμένο.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = 0$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

13. Να βρείτε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x + 5}{3^x + 2^{x+1} + 2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 3^x + 1}{8^x + 5^x + 1}$$

14. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left| (2 + x^4)f(x) - 3x^4 \right| \leq x^2 + 1, \text{ να βρείτε τα όρια:}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x) \eta \mu \frac{1}{x}$$